CM du 10 déc.

G - groupe. $x, y \in G$

1. commutent-ils entre eux ?

est-ce que $\underline{xy = yx}$?

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{xyx^{-1}y^{-1}} = e$$

<u>déf</u> le <u>commutateur</u> de x et y est :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

Donc : $xy = yx \iff [x, y] = e$.

2. G est-il abélien ?

Oui ssi $[x,y] = e \quad \forall x, y \in G$.

3. Soit $H \trianglelefteq G$. G/H est-il abélien ?

Oui ssi $\forall\, xH, yH \in G/H : \underline{[xH, yH] = eH}$ dans G/H.

$$[xH, yH] = xH \cdot yH\, (xH)^{-1} (yH)^{-1}$$
$$= xyx^{-1}y^{-1}H = [x,y]H$$

Donc : G/H est abélien ssi

$$\forall x, y \in G : [x,y] \in H.$$

$\Longrightarrow$

<u>déf</u> Le <u>commutateur</u> de G est le ss-groupe engendré par l'ensemble $\{[x,y] : x, y \in G\}$.

Il est noté $[G, G]$ (ou parfois G'...).

Rmq / exemple : G est abélien ssi $[G,G] = 1 (= \{e\})$

Exemple $[S_n, S_n] = A_n$.

En effet, d'un côté :

$$sgn([\sigma,\tau]) = sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)\cdot \underbrace{sgn(\sigma^{-1})}_{=sgn(\sigma)}\cdot \underbrace{sgn(\tau^{-1})}_{sgn(\tau)} = 1$$

$\Rightarrow [S_n, S_n] \subseteq A_n$.

$\Leftarrow$ Soit $(i\ j)$ et $(a\ b)$ deux transp. (pas forcément disjointes)

posons $\sigma = (i\ j) \in S_n$

$\tau \in S_n$ t.q. $\tau(i) = a$, $\tau(j) = b$ (existe !)

$[\sigma,\tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ $\quad \sigma^{-1} = \sigma = (i\ j)$

$$= (i\ j)\underbrace{\tau(i\ j)\tau^{-1}}_{(a\ b)} = (i\ j)(a\ b) \in [S_n, S_n].$$

Donc toute permutation paire (= pr. d'un nombre pair de transpositions) appartient à $[S_n, S_n]$.

c'àd : $A_n \subseteq [S_n, S_n]$

On peut reformuler ce qu'on a vu tout à l'heure comme : $\boxed{\text{Soit } H \trianglelefteq G. \text{ alors } G/H \text{ est abélien ssi } H \supseteq [G,G].}$

En particulier $G/[G,G]$ est abélien.

Prop. $[G,G]$ est toujours un ss-grp distingué de G.

avant la preuve :

Lemme Soit $S \subseteq G$ t.q. $\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in G : \\ x S x^{-1} = S.\end{array}}$

$\left((\Leftarrow) \quad N_G(S) = G \right)$

alors. $\langle S \rangle \trianglelefteq G$.

Preuve: Soit $H = \langle S \rangle$. Soit $x \in G$.

alors: $H \supseteq S \Rightarrow \underline{x H x^{-1}} \supseteq x S x^{-1} = S$.

Donc xHx^{-1} est aussi un ss-groupe de G qui contient S.

Par déf du ssgrp engendré:

$H \leq xHx^{-1}$.

ceci est vrai $\forall x \in G$

On a vu que cela suffit pour déduire que $H \trianglelefteq G$. ☒

Preuve de la proposition :

On prend $S = \{ [x, y] : x, y \in G \}$.

Soit $z \in G$:

$\forall \; x, y \in G$:

$z [x, y] z^{-1} = z x y x^{-1} y^{-1} z^{-1}$

$= z x z^{-1} \; z y z^{-1} \underbrace{z x^{-1} z^{-1}}_{(zxz^{-1})^{-1}} \underbrace{z y^{-1} z^{-1}}_{(zyz^{-1})^{-1}} = [z x z^{-1}, z y z^{-1}]$

autrement dit: $\forall z \in G$ et $w \in S$:

$z w z^{-1} \in S$

donc: $z S z^{-1} \subseteq S$

Remplaçant z par z^{-1} : $z^{-1} S z \subseteq S$

$\iff \quad S \subseteq z S z^{-1}$.

$\therefore \quad \forall z \in G : \quad S = z S z^{-1}$

D'après le lemme : $[G,G] = \langle S \rangle \trianglelefteq G$

$\Rightarrow \forall G : [G,G] \trianglelefteq G$ et $G/_{[G,G]}$ est abélien.

Rmq / Ex 20 :
Soit $H \trianglelefteq G$. On dit que H est un ss. groupe caractéristique de G si :

$$\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G) \quad : \quad \varphi(H) = H.$$

1. Tout ss. groupe caractéristique de G est un ss groupe distingué de G.
(considérer, pour chaque $x \in G$, que la conjugaison par x est un automorphisme de G.)

2. En améliorant l'argument donné plus haut, $[G,G]$ est un ss-grp caractéristique.

3. Le centre $Z(G)$ est aussi un ss-grp caractéristique de G.

Que se passe-t-il si on itère cette construction?
On appellera $[G,G]$ le groupe dérivé de G et on écrira $G' = [G,G]$.

On pose
$$G^{(0)} = G$$
$$G^{(1)} = G'$$
$$G^{(2)} = G''$$
$$\vdots$$
$$G^{(n+1)} = \left(G^{(n)}\right)'$$

Déf. Un groupe G est **résoluble** s'il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ t.q. $G^{(n)} = 1$.

Que peut-il se passer ?

$$G^{(0)} = G \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq G^{(2)} \cdots \trianglerighteq G^{(n)} \trianglerighteq G^{(n+1)} \trianglerighteq$$

Exo: chaque $G^{(n)}$ est un ss-grp distingué et même caractéristique, de G.

Si n est t.q. $G^{(n)} = G^{(n+1)}$ alors $G^{(m)} = G^{(n)}$ $\forall\, m \geq n$

$$\cdots \quad G^{(n)} = G^{(n+1)} = G^{(n+2)} \cdots$$
$$G^{(n+1)} = G^{(n)\prime}, \quad G^{(n+2)} = (G^{(n+1)})' = G^{(n)\prime} = G^{(n)}$$

par réc sur $m \geq n$: $m = n$: $G^{(m)} = G^{(n)}$ ✓

si on sait que $G^{(m)} = G^{(n)}$ alors

$$G^{(m+1)} = (G^{(m)})' = (G^{(n)})' = G^{(n+1)} = G^{(n)}.$$

Donc: Ou bien $G^{(n)} \neq G^{(n+1)}$ $\forall n$.

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \cdots$$

ou bien $\exists$ plus petit n t.q. $G^{(n)} = G^{(n+1)}$:

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright \cdots \triangleright G^{(n)} = G^{(n+1)} = G^{(n+2)} \cdots$$

Si G est un groupe fini et
$G^{(n)} \ntriangleright G^{(n+1)}$ alors $|G^{(n)}| > |G^{(n+1)}|$
On est donc forcément dans le 2e
cas, avec $n \leq |G|$ le plus petit
t.q. $G^{(n)} = G^{(n+1)}$. (voire $n \leq \log_2 |G|$).

Du coup : Pour G fini :
soit n t.q. $G^{(n)} = G^{(n+1)}$
alors G est résoluble ssi $G^{(n)} = 1$.

Déf. Soit G un groupe. Une suite de composition de G est une suite finie de ss-groupes
$(G_0, G_1, \dots, G_r)$ t.q :

$$G_0 = G \quad , G_r = 1 \quad \text{et} \quad \forall_{i<r} : G_i \trianglerighteq G_{i+1}$$

$$G_0 = G \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{r-1} \triangleright G_r = 1.$$

Donc : G est résoluble ssi $\exists n$ t.q.
$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \dots \triangleright G^{(n-1)} \triangleright G^{(n)} = 1$
est une suite de composition

En effet ; si G est résoluble on prend le
plus petit n t.q. $G^{(n)} = 1$
donc $\forall i < n$: $G^{(i)} \triangleright G^{(i+1)}$ (sinon on
aurait $G^{(i)} = G^{(i+1)} \Rightarrow G^{(i)} = G^{(n)} = 1$
contredisant la minimalité de n)
Réciproquement, si $\exists n$ t.q. $G^{(0)} \dots G^{(n)}$ est

une suite de composition alors en particulier,

$G^{(n)} = 1. \Rightarrow G$ est résoluble.

Exm : $\forall\, G \neq 1$ $\exists$ une suite de composition "triviale" :

$$G = G_0 \rhd 1 = G_1$$

Cette suite de composition ne nous apporte aucune information sur G...

Prop : G est résoluble ssi il admet une suite de composition

$$G_0 = G \rhd G_1 \ldots \rhd G_i \rhd G_{i+1} \ldots \rhd G_r = 1$$

t.q. $\forall\, 0 \leq i < r$: G_i / G_{i+1} est abélien.

Preuve : $\Rightarrow$: Supposons que G est résoluble et soit n minimal tq. $G^{(n)} = 1$. alors :

$$G = G^{(0)} \rhd G^{(1)} \rhd \ldots \rhd G^{(n)} = 1$$

est une suite de composition et $\forall\, 0 \leq i < n$: $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$

$\Rightarrow$ $G^{(i)} / G^{(i+1)}$ est abélien.

$\Leftarrow$: On suppose que l'on a une suite de composition

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_i \rhd G_{i+1} \rhd \ldots \rhd G_r = 1.$$

t.q. $\forall\, 0 \leq i < r$: G_i / G_{i+1} est abélien.

Je vais montrer que : $\forall\, 0 \leq i \leq r$: $G_i \geq G^{(i)}$

par réc. sur i.

$i=0$: $G_0 = G = G^{(0)}$ ✓

On suppose pour i et on démontre pour $i+1$:

hypothèse : $G_i \geq G^{(i)}$,

et $G_{i+1} \triangleleft G_i$ et G_i/G_{i+1} est abélien

$\Longleftrightarrow$

$\Rightarrow$ $G_{i+1} \geq [G_i, G_i] = \langle [x,y] : x,y \in G_i \rangle$

or : $\{[x,y] : x,y \in G^{(i)}\} \subseteq \{[x,y] : x,y \in G_i\}$.

$\Rightarrow$ $\langle \text{———} \rangle \leq \langle \text{———} \rangle$

càd : $\underbrace{[G^{(i)}, G^{(i)}]}_{= G^{(i+1)}} \leq [G_i, G_i]$

d'où $G_{i+1} \geq G^{(i+1)}$.

En particulier : $G^{(r)} \leq G_r = 1 = \{e\}$

i.e. $G^{(r)} = \{e\} = 1$ (il se peut que

l'on ait aussi $G^{(m)} = 1$ pour un $m < r$)

(Dans la conclusion du sens $\Leftarrow$ on a

Sorcement : $\exists\, n \leq r$:

$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright \dots \triangleright G^{(n)} = 1 = \dots = G^{(r)} = 1$)

<u>Exemples</u> 1. Pour $\underline{n \geq 5}$ $G = S_n$ n'est pas résoluble.

<u>En effet</u> : $G^{(0)} = S_n$, $G^{(1)} = A_n$.

$G^{(2)} = A_n' = [A_n, A_n]$.

Or A_n n'est pas abélien $\Rightarrow G^{(2)} \neq 1$.

et : A_n est simple ($n \geq 5$!) et $G^{(2)} = A_n' \trianglelefteq A_n$

$\Rightarrow G^{(2)} = A_n$.

$\Rightarrow G^{(m)} = A_n \neq 1 \quad \forall m \geq 1$.

$\Rightarrow S_n = G$ n'est pas résoluble.

2. S_4 est résoluble :

On a
$$\underset{\overset{\shortparallel}{H}}{\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}}$$

$$S_4 \rhd \underset{\overset{\shortparallel}{A_4}}{A_4} \rhd H \rhd 1.$$

S_4/A_4 est abélien car $A_4 = S_4' = [S_4, S_4]$, car $|S_4/A_4| = 2$

$$|A_4/H| = \frac{|A_4|}{|H|} = \frac{12}{4} = 3$$

$\Rightarrow A_4/H \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est abélien

$H \simeq H/1$ est abélien.

3. Ex : D_n est résoluble $\forall n \geq 3$.

Pause => 10 55

Thm de Jordan-Hölder

G - un groupe.

Une suite de composition de G est une suite $(G_0, G_1, \ldots G_r)$

t.q. $G_0 = G \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_{r-1} \rhd G_r = 1$.

En quelque sorte, G est "composé" des groupes quotient G_i / G_{i+1}.

[résoluble = composé de groupes abélien de cette manière].

Mais : les G_i/G_{i+1} peuvent être eux aussi composés de ss-groupes plus petits... ?

Déf : Soit $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_r = 1$

et $G = H_0 \rhd H_1 \rhd \ldots \rhd H_t = 1$

deux suite de composition.

On dit que (H_i) raffine (G_i) si la suite (G_i) est extraite de (H_i)

par exemple : $S_4 \rhd A_4 \rhd H \rhd 1$

comme plus haut

raffine $S_4 \rhd A_4 \rhd 1$.

qui raffine $S_4 \rhd 1$.

Déf : Soit G un groupe.

Un ss groupe distingué maximal H de G est un ss-grp distingué strict $H \lhd G$ t.q. $\forall K \trianglelefteq G$ si : $K \supseteq H$ alors $K = H$ ou $K = G$

Autrement dit : Entre H et G il n'y a pas de ss-grp distingué de G sauf H et G.

Lemme Soit $H \trianglelefteq G$. alors H est un ss-groupe distingué maximal ssi : G/H est simple

> G est simple si (i) $G \neq 1$
> (ii) si $H \trianglelefteq G$ alors $H = G$ ou $H = 1$

Preuve : $\Longrightarrow$: On suppose que H est un ss-grp dist. max.

alors : $H \lhd G$, $H \neq G$

$\Rightarrow G/H \neq 1$.

Soit $K \trianglelefteq G/H$.

On a une suite de morphismes :

> φ, ψ - morphismes quotient :
> $\ker \varphi = H$, $\ker \psi = K$.

$$G \xrightarrow[g \mapsto gH]{\varphi} G/H \xrightarrow[x \mapsto xK]{\psi} (G/H)/K.$$

Soit $K' = \ker \psi \circ \varphi = \varphi^{-1}(\ker \psi) = \varphi^{-1}(K)$

$\{x : \psi(\varphi(x)) = e\} = \{x : \varphi(x) \in \ker \psi\}$

alors $K' \trianglelefteq G$, et $K' \supseteq \ker \varphi = H$

$\Longrightarrow$ comme H est maximal, $K' = H$
ou $K' = G$.

si $K' = H \Rightarrow \varphi^{-1}(\overbrace{\ker \psi}^{K}) = \varphi^{-1}(\{e\})$
$\Rightarrow K = \{e\}$.

et si $K' = G$: $\varphi^{-1}(K) = G$
$\Rightarrow K = G/H$.

$\Rightarrow G/H$ est simple

$\Longleftarrow$: On suppose que G/H est simple.

$\Rightarrow$ ($\underline{G/H} \neq \underline{1}$ $\Rightarrow$ $H \neq G$

Soit $H \leq K \trianglelefteq G$
$H \trianglelefteq G$

D'après le 3e thm d'isomorphie :

$$G/K \simeq \frac{(G/H)}{(K/H)} \qquad xK \longmapsto (xH)K$$

(et : $K/H \trianglelefteq G/H$.)

$\Rightarrow K/H = 1$ ou G/H / car G/H est simple)

si $K/H = 1$: $K = H$.

si $K/H = G/H$: $G/K \simeq 1 \Rightarrow K = G$.

<u>Idée de la suite :</u>

G - Groupe fini.

Étant donné une suite de composition

$G = G_0 \rhd - - - \rhd G_r = 1$:

$r \leq |G|$ $\quad (r \leq \log_2 |G|)$

Je peut peut être raffiner la suite en insérant des sous-groupes intermédiaires:

$$- - - - G_i \rhd H \rhd G_{i+1}$$

On peut le faire chaque fois que G_{i+1} n'est pas un ss-grp distingué maximal de G_i.

On raffine, on raffine ... mais ça doit s'arrêter car on a majoré la longueur d'une suite de comp.

$\rightsquigarrow$ Une suite de composition $\boxed{\text{impossible à raffiner.}}$

$\Downarrow$

$\forall\, 0 \leq i < r$: longueur :

G_{i+1} est un ss-grp dist. maximal de G_i

$\Updownarrow$

Vérif G_i / G_{i+1} est simple.

Une suite de Jordan-Hölder pour G est une suite de composition $G = G_0 \rhd G_1 \dots \rhd G_r = 1$

t.q. $\forall i$ G_i/G_{i+1} est simple

($\Leftrightarrow$ $\forall i$ G_{i+1} est dist. max dans G_i

$\Leftrightarrow$ pas de raffinement)

exemple :

$$G = \underset{G_0}{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \rhd \underset{\underset{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}{\wr}}{\overset{G_1}{\{\bar 0, \bar 2, \bar 4\}}} \rhd \overset{G_2}{1}$$

$$G = \overset{H_0}{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \rhd \underset{\underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\wr}}{\overset{H_1}{\{0, \bar 3\}}} \rhd \overset{H_2}{1}.$$

ce sont des suites de J-H.

$G_0/G_1 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad$ $H_0/H_1 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$G_1/G_2 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $\quad$ $H_1/H_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Tout groupe fini G admet une suite de J-H : On commence avec $\underbrace{G \rhd 1}_{\text{la suite de comp.}}$ et on raffine autant que possible.

Thm de Jordan-Hölder :

Soit G un groupe fini,

$G = G_0 \rhd G_1 \dots \rhd G_r = 1$

$G = H_0 \rhd H_1 \dots \rhd H_t = 1$

deux suites de J-H.

alors 1. $r = t$.

2. Les listes des quotients

G_0/G_1, ..., G_{r-1}/G_r ← Groupes simples

H_0/H_1, ..., H_{r-1}/H_r ←

Sont l'une une permutation de l'autre.

⟹ "La liste des composantes simples de G est bien unique"

FIN